一道高三模拟考试题的思路探究与拓展

江苏省海门中学　226100　樊陈卫

一、问题给出

题目　在平面直角坐标系 xoy 中，已知圆 *O*：$x^2+y^2=1$，*C*：$(x+1)^2+y^2=9$，直线 l 与圆 *O* 相切，与圆 *C* 相交于点 A、B 两点，分别以点 A、B 为切点作圆 *C* 的切线 l_1、l_2，l_1、l_2 交点为 P，求 OP 的最小值.

A.9　　B.7　　C.$3\sqrt{7}$　　D.$\dfrac{7}{2}$

这道题是江苏省海门中学、苏州中学、淮阴中学、姜堰中学四校高三联考的单选压轴题，答案为 D.我校学生在该题的得分率高达 0.74，如此高的得分率是否与本题在试卷中起到单选压轴作用的地位不太匹配呢？和学生交流后发现，多数学生得到正确答案的方法是观察圆 *O* 上的切点 *D* 在原点 *O* 左右两侧的特殊情形，如图 1、2，再与动点 *D* 位置一般情形如图 3 比照，凭直觉猜想得到当 *D* 在 *O* 点右侧时 OP 有最小值，此时如图 2，在 $Rt\Delta CAP$ 中，由射影定理可得 $CA^2=CD\cdot CP$，易得 $CP=\dfrac{9}{2}$，OP 有最小值为 $\dfrac{7}{2}$.

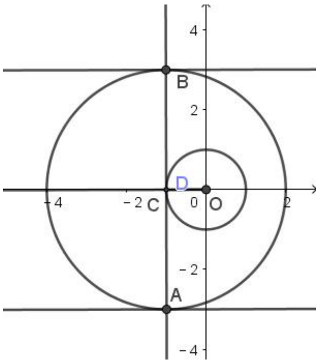

图 1

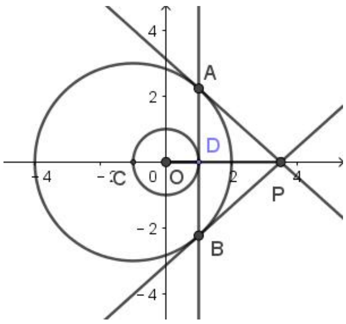

图 2

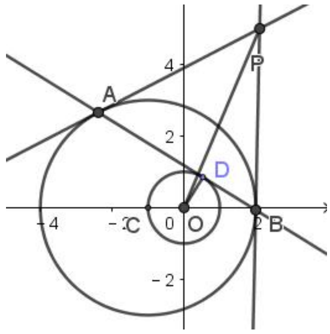

图 3

对于本题的命题意图与学生临场表现的出入，作为科任教师笔者首先感到的是欣慰，原因是学生没有被压轴题的位置所吓到，而是敢于面对勇于胜利，也贯彻了善于从特殊情形探索问题的结论和解决问题的思路这个数学思想方法.同时作为考后回顾，也有必要带领学生对这道题目进行深入的探究，获得对问题的本质理解.

二、结论证明

OP 有最小值为 $\dfrac{7}{2}$ 这一结论的获得比较轻松，但证明就没有那么容易了，从哪里入手？这个问题，有学生从平面几何的角度来思考：

师：困难在于线段 OP 的长与点 A、B 为切点不容易直接关联，如何利用“点 A、B 为切点”这一条件？

生：应该连接 CA、CP，CP 与 AB 交点为 M .如图 4

师：很好，试一试，结合“点 A、B 为切点”这个条件看看有什么发现？

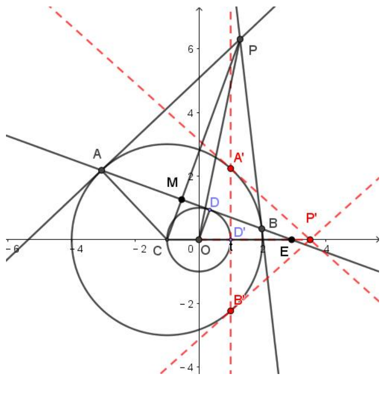

图 4

生：$CA^2 = CM \cdot CP \Rightarrow CP = \dfrac{9}{CM}$

师：能不能先确定CM的范围，进一步确定CP的范围？

生：CM由圆O的切线l确定，引入l与x轴夹角$\angle DEO = \alpha$，

当点E在点O右侧时，考虑$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$，$OE = \dfrac{1}{\sin\alpha}$，由$\Delta ODE \backsim \Delta CME$，得$\dfrac{CM}{CE} = \dfrac{OD}{OE}$，

得$CM = 1 + \sin\alpha \Rightarrow CP = \dfrac{9}{1+\sin\alpha}$，当$\alpha$越大，$CP$越小，$\alpha \to \dfrac{\pi}{2}$时，$CP \to \dfrac{9}{2}$，此时

$CP > \dfrac{9}{2}$；再如图2，$\alpha = \dfrac{\pi}{2}$时，$CP = \dfrac{9}{2}$；

当l与x轴平行，$CM = 1$，$CP = 9$；

当点E在点O左侧时，考虑$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$，由与点$E$在点O右侧时类似方法可得

$CM = 1 - \sin\alpha$，$CP = \dfrac{9}{1-\sin\alpha}$，此时$CP > 9$；再如图1，$\alpha = \dfrac{\pi}{2}$时，$P$点不存在；

综上，CP有最小值$\dfrac{9}{2}$

师：很好，这个结论从图上看显而易见，当说清楚逻辑关系，也要费一番功夫的，它对我们要解决的问题有帮助吗？我们要求的是OP的最小值！

生：再考虑CP与OP的关系：$OP \ge CP - OC = CP - 1$

师：CP与OP的关系还有其它的表达方式，由求解的问题确定选择上述关系.

生：对，进一步有$OP \ge CP - OC = CP - 1 \ge \dfrac{9}{2} - 1 = \dfrac{7}{2}$即$OP \ge \dfrac{7}{2}$，$l$在圆O上切点D为$(1,0)$时，不等式取等号，故$OP$最小值为$\dfrac{7}{2}$.

师：很好.这个解法中CP连接已知和所求的桥梁，大家可以从CP的作用体会解题的思路.另外，从前面的解题过程中大家能感觉到动点P的轨迹是什么曲线吗？

生：感觉CP的长可以是无穷的，有可能是抛物线或双曲线？

师：到底是不是抛物线或双曲线，需要求出轨迹方程，要从解析几何的角度去探究了.

三、轨迹方程

思路1　直线l于圆O是切线，对于圆C是关于圆外点P的切点弦，可以从这两个角度表示出直线l的方程，解法如下：

解法1 直线l的方程变量x、y的系数不同时为0，不失一般性，不妨设其方程为

$kx + y + t = 0$，由直线l对于圆O是切线，$d = \dfrac{|t|}{\sqrt{1+k^2}} = 1$，即$l$为$kx + y \pm \sqrt{1+k^2} = 0$（*）

设点$P(x_0, y_0)$，由$P(x_0, y_0)$确定的切点弦方程为：$(x_0+1)(x+1) + y_0 y = 9$，整理得

$(x_0+1)x + y_0 y + x_0 - 8 = 0$（**）

由（*）与（**）是同一个方程，故$\begin{cases} x_0 + 1 = y_0 k \\ x_0 - 8 = \pm y_0\sqrt{1+k^2} \end{cases}$，消去$k$得到：${y_0}^2 = -18x_0 + 63$.

即点 P 的轨迹为抛物线 $y^2=-18x+63$.

思路 2 以 CP 为直径构造圆，由 PA 、 PB 为圆 C 的切线可得 AB 为两圆的相交弦，从而得到直线 AB 方程.

解法 2 设 $P(x_0,y_0)$，从而以 CP 为直径的圆方程为：$(x-x_0)(x+1)+(y-y_0)y=0$

化简得：$x^2+(1-x_0)x-x_0+y^2-y_0y=0$，与圆 C 方程相减得到直线 AB 的方程：

$(x_0+1)x+y_0y+x_0-8=0$

由题意，AB 与圆 O 相切，从而 $\dfrac{|x_0-8|}{\sqrt{(x_0+1)^2+{y_0}^2}}=1$，得到 ${y_0}^2=-18x_0+63$

即点 P 的轨迹为抛物线 $y^2=-18x+63$.

两个解法求轨迹方程的总体思路相似，都是设出动点坐标，再利用条件建立含有动点坐标的方程. 区别之处是解法 1 直接由已知条件出发，思路比较自然，计算稍显繁琐；解法 2 巧妙构造圆方程，使得计算简捷明了. 进一步思考如果两圆圆心重合，易得动点 P 的轨迹为圆，随着两圆情况的变化，动点 P 的轨迹如何变化？

四、圆锥曲线

要弄清各种情形下动点 P 的轨迹，需要对原问题进行一般化：

圆 O：$x^2+y^2=r^2(r>0)$，C：$(x-a)^2+y^2=R^2(R>r)$，直线 l 与圆 O 相切，与圆 C 相交于点 A、B 两点，分别以点 A、B 为切点作圆 C 的切线 l_1、l_2，l_1、l_2 交点为 P，则根据原题 P 点的轨迹求法可以得到这里 P 的轨迹方程：

$$(r^2-a^2)(x-a)^2+r^2y^2-2aR^2(x-a)-R^4=0$$

即 $(r^2-a^2)\left(x-\dfrac{ar^2+aR^2-a^3}{r^2-a^2}\right)^2+r^2y^2-\dfrac{r^2R^4}{r^2-a^2}=0$ ①

当 $a=0$ 时，圆 O 与圆 C 是同心圆，轨迹方程①即为 $x^2+y^2=\dfrac{R^4}{r^2}$，即半径为 $\dfrac{R^2}{r}$ 的同心圆；

当 $a<r$ 时，圆 C 的圆心在圆 O 内部，轨迹方程①即为中心在 $\left(\dfrac{ar^2+aR^2-a^3}{r^2-a^2},0\right)$ 的椭圆；

当 $a=r$ 时，圆 C 的圆心在圆 O 上，轨迹方程即为抛物线 $r^2y^2-2aR^2(x-a)-R^4=0$；

当 $a>r$ 时，圆 C 的圆心在圆 O 外，轨迹方程①即为中心在 $\left(\dfrac{ar^2+aR^2-a^3}{r^2-a^2},0\right)$ 的双曲线.

五、教学启示

这道题的解题教学过程给笔者如下启示：首先教师不能只看学生解题结果对错，而是应该关注学生面对问题是怎么想的，做对了是怎么做对的，做错了是什么原因做错的，摸清了学生解题过程中的思维亮点和断点，教师的解题教学才能有的放矢，有明确的针对性.其次，解题教学中，教师要注意引导学生思考的艺术性，针对学生的思维断点，给学生指导下的普适性的提示，让学生能在师生的思维交流中有自己的思考活动.最后，教师应该认识到，高考题大多是将一般性问题特殊化，具体化，只要做好对问题的特殊性与一般性分析，看高考题就能把握其本质.

作者简介：江苏省海门中学　　226100　　樊陈卫，（1978-），女，江苏海门人，中学高级教师，南通市骨干教师。主要研究解题教学和高考试题动向，在《中学数学》《数学教学》《中学数学研究》《中学数学教学》《高中数学教与学》等杂志发表论文多篇。