基本不等式拓展教学实践

顾旭东　　江苏省海门中学（226100）

《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》提出了六大数学核心素养：数学抽象、逻辑推理、数学建模、数学运算、直观想象和数据分析．基本不等式是高中数学非常重要的知识点，也是高考中的高频考点．但在人教版和苏教版的体系中，对基本不等式的 $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}(a\ge0,b\ge0)$ 的研究不够深入，其中的数学抽象、逻辑推理、数学运算、直观想象都没有得到充分的展示．本文将对教材中的基本不等式进行适当的拓展，旨在激发学生数学学习的兴趣培养学生数学探索的能力，发展学生的数学核心素养．

1 问题提出

（人教版必修 1 第 45 页探究）在图 1 中，AB 是圆的直径，点 C 是 AB 上一点，$AC=a$，$BC=b$ 过点 C 作垂直于 AB 的弦 DE，连接 AD,BD 你能利用这个图形，得出基本不等式的几何解释吗?

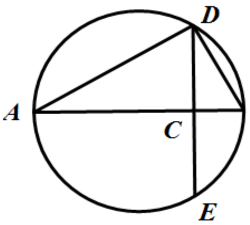

图 1

如图 1，可证 $\Delta ACD\backsim\Delta DCB$，因而 $CD=\sqrt{ab}$．由于 CD 小于或等于圆的半径，用不等式表示为 $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$．显然，当且仅当点 C 与圆心重合，即当 $a=b$ 时，上述不等式的等号成立．

（苏教版必修1第51~52页）如图2，AB 是 $\odot O$ 的直径，$AC=a$，$CB=b$，过点 C 作 $CD\perp AB$ 交 $\odot O$ 的半圆于点 D，连接 AD,BD，易知 $\Delta ACD\backsim\Delta DCB$，故 $\frac{CD}{CB}=\frac{CA}{CD}$，得 $CD=\sqrt{ab}$．而 $OD=\frac{a+b}{2}$，且 $CD\le OD$，所以 $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$，当且仅当点 C 与 O 重合，即 $a=b$ 时，等号成立．

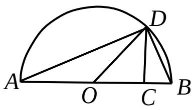

图 2

问题　思考不等式链

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}\ge\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\ge\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}\ge\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}(a>0,b>0)，$$

能否在图形中类似给出上述不等式链中的对象的几何解释?

笔者在课堂中曾多次演绎，效果颇佳，现以部分课堂实录展示如下，供读者参考．

2 教学实录

师　在图 2 中，$CD\le OD$ 当且仅当 O 与 C 重合时等号成立，代表 $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}(a\ge0,b\ge0)$ 当且仅当 $a=b$ 时等号成立，这是数形结合的一次完美展现，那么

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}\ge\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\ge\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}\ge\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}(a>0,b>0)$$

中的其他对象能否以线段的形式展现呢?

（学生以小组为单位开始讨论．）

生 1　在图 3 中，过 C 作 OD 的垂线 CE，在 $\mathrm{Rt}\Delta OCD$ 中通过射影定理 $DC^2=DE\cdot OD$，可求出 $DE=\frac{DC^2}{OD}=\frac{ab}{\frac{a+b}{2}}=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$．

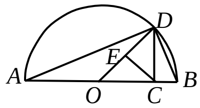

图 3

师　很好，$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ 在数学上也被称为 a 与 b 的调和平均数，那么 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$（通常被称为 a 与 b 的平方平均数）又在何方呢?

教师在巡视互动的过程中，提示

$$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}\ge\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

在图中本质是体现了斜边与直角边的比较．

5 分钟后部分学生开始泄气，教师再次提示 $\frac{a+b}{2}$ 除了表示 OD 以外，还是半径的化身，现在又

要作为某一直角三角形的直角边，而$\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$同时作为该直角三角形的斜边，由此会带来什么呢?

生 2 该直角三角形的另一条直角边边长为$\dfrac{a-b}{2}$，但是没有发现$\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$的痕迹．

生 3 (生 2 的同桌) 兴奋之情溢于言表：$\dfrac{a-b}{2}$在图 1 中表示的是OC，如图 4，作$OF\perp AB$，连结CF，此时$CF=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$，也正好体现斜边与直角边的关系．

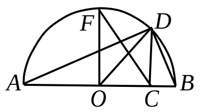

图 4

师 非常棒! 大家一起为生 3 的回答鼓掌，那么斜边CF又作为谁的直角边呢?

话音未落,班级一致公认最聪明的生4举手了．

生 4 在图 5 中，过点C作CF的垂线与OF反向延长线交于点G，FG即为$\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$．

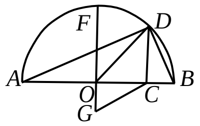

图 5

师 好，让我们一起来证明生 4 的伟大的猜想! 其中$\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$也戏称为双方平均数．

片刻后肯定了生 4 的结论．

师 数学的发展离不开严密的思维，更离不开直观的想象，通过缜密的逻辑推理化抽象为具体，让我们体会到代数式展现的图形之美，课本上还有一处也可让我们感受不等式链

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}\geq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geq\frac{a+b}{2}$$
$$\geq\sqrt{ab}\geq\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}(a>0,b>0)$$

的几何存在，见下题．

(苏教版必修1第70页练习16)如图6，$ABDC$为梯形，其中$AB=a$，$CD=b$，设O为对角线的交点，GH表示平行于两底且与它们等距离的线段（即梯形的中位线），KL表示平行于两底且使梯形$ABLK$与梯形$KLDC$相似的线段，EF表示平行于两底且过点O的线段，MN表示平行于两底且将梯形$ABDC$分为面积相等的两个梯形的线段．试研究线段GH, KL, EF, MN与代数式

$$\frac{a+b}{2},\sqrt{ab},\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}},\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

之间的关系，并据此猜测它们之间的一个大小关系，你能用基本不等式证明所得到的猜测吗?

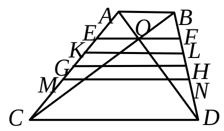

图 6

生 5 $GH=\dfrac{a+b}{2}$，$KL=\sqrt{ab}$，$EF=\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$，$MN=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$．再由$MN>GH>KL>EF$，可得$\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}>\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}>\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$．

生 6 上式当且仅当$a=b$时等号成立．

师 为生 5 与生 6 这对黄金搭档鼓掌，那么如何用基本不等式证明今天就作为课后作业，老师感兴趣的是如何证明：$EF=\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$，$MN=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$．

为此，老师不妨构造一个你们初中的题目，如图 7，已知梯形$ABDC$，对角线交于点O，过O作上下底的平行线，分别交AC, BD于E, F两点，其中$AB=a$，$CD=b$．(1) 求证：$OE=OF$，(2) 求证：$EF=\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$．

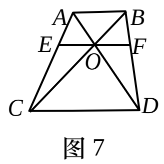

图 7

生 4 （举手）老师，这两问本质上只要证明$OE=\dfrac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$即可，通过相似可以推出$\begin{cases}\dfrac{OE}{b}=\dfrac{AO}{AD},\\ \dfrac{OE}{a}=\dfrac{OC}{BC}.\end{cases}$因为$\dfrac{AO}{AD}+\dfrac{OC}{BC}=\dfrac{AO}{AD}+\dfrac{OD}{AD}=1$，所以两式相加得到

$OE=\dfrac{1}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$．生 4 的巧妙回答赢来了满堂喝彩．

师 因为这条线EF经过对角线的交点，我们不妨称它为中心线，那么又怎样推出$MN=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$，老师提示，面积离不开高（假设上下两个梯形的高分别为h_1, h_2）．

生 7 老师，我可以得到一个等式（设$MN=t$）$\dfrac{a+t}{2}\cdot h_1=\dfrac{b+t}{2}\cdot h_2=\dfrac{a+b}{4}\cdot(h_1+h_2)$，消去$h_1, h_2$，求出$t$即可．

师 很好，那么我们一起向着这个目标前进，给大家 5 分钟时间．

不知不觉 10 分钟过去了，通过巡视发现只有少数几个同学算到结果，究其原因不外乎运算出了问题（就是平常我们所说的眼高手低的原因），并且算到结果的同学计算过程也不令人满意．

教师在黑板上进行简单的板书：因为

$$\frac{a+t}{2}\cdot h_1=\frac{b+t}{2}\cdot h_2=\frac{a+b}{4}\cdot(h_1+h_2),$$

所以

$$\begin{cases}\dfrac{h_1}{h_1+h_2}=\dfrac{a+b}{2(a+t)},\\[2mm] \dfrac{h_2}{h_1+h_2}=\dfrac{a+b}{2(b+t)},\end{cases}$$

两式相加得到$2=\dfrac{a+b}{a+t}+\dfrac{a+b}{b+t}$，通过变形得到

$$2=\frac{a+t+(b-t)}{a+t}+\frac{b+t+(a-t)}{b+t},$$

所以$0=\dfrac{b-t}{a+t}+\dfrac{a-t}{b+t}$，通分得$0=b^2-t^2+a^2-t^2$，则$t^2=\dfrac{a^2+b^2}{2}$，即$t=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$．

师 同学们可以感受一下你们的运算与老师的运算有什么差别，学到了什么？

生 8 （数学课代表）在消h_1, h_2时，没想到利用整体特点$\dfrac{h_1}{h_1+h_2}+\dfrac{h_2}{h_1+h_2}=1$，同时对

$$2=\frac{a+b}{a+t}+\frac{a+b}{b+t}$$

盲目通分，使该等式变得复杂最终浪费了很多不必要的时间．

师 为了纪念我们的推导过程，线段MN，给它取名为“等积线”．数学的六大核心素养由数学抽象、逻辑推理、数学建模、数学运算、直观想象和数据分析组成，所以说数学运算也必须在大家的心中有一定的位置．就本题而言可以划上一个完美的句号了，但……

话音未落，生 4 又举手了．

生 4 老师，如果我们能把您说的双方平均数$\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$在梯形中也体现出来，那就漂亮了．

师 数学需要质疑，更需要大胆的想象，在这方面生 4 是我们大家的榜样，应该说六大素养中数学抽象与直观想象是最难的，感觉差不多是无中生有的味道，在此老师可以稍作提示，刚才我们研究了中心线EF （$EF=\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$）（如图 7）．其实对于中心线我还可以给它定义一个新的名称叫“顺比线”即满足$\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{a}{b}$．同学们可以按照我的提示去研究，可以互相讨论，找到了，算到了的同学可以先举手发言．

时间很快，生 9“张牙舞爪”的举手示意：只要满足$\dfrac{AJ}{JC}=\dfrac{b}{a}$就可以了，如图 8，$JK$即为所求．

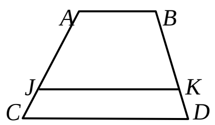

图 8

“是呀”“好玩”教室沸腾了．

师 同学们，找到JK意味着我们走到了编书者的前面，我们不妨给JK取一个名字，称它为“逆比线”可好．

教室响起了经久不息的掌声．

3 教学感悟

以上问题都是编写组精挑细选出来的，都是从特殊图形出发，都是围绕基本不等式这一个知识点，又都是体现了数形结合的思想，题目的构思来源于教材，但又不拘泥教材，同时不回避重点．但笔者认为如果编者能在这两个题组中设置一条暗线，通过层层推进，最终导出：双方平均数（逆比线）≥平方平均数（等积线）≥算术平均数（中位线）≥几何平均数（相似线）≥调和平均数（顺比线）．这一切不仅可以激发学生学习数学的兴趣，更有助于学生探索能力的培养，陈景润老先生说的“数学好玩”恐怕就是如此吧．