函数思想巧证恒等式

江苏省海门中学　　樊陈卫（226100）

函数在高中数学中有重要的地位，与很多知识点可以产生关联，函数思想是重要的思想方法，在很多问题中可以得到应用.本文通过两个例子来说说函数思想在恒等式证明中的应用.

例 1　证明 $\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=1$

分析 如果拿到这道题目，用常规思路将等式左边通分，分子再分别展开、合并，将会做得比较繁琐，事实上学生面对这道看似平常的问题真正做对的寥寥无几.注意到等式右边 a、b、c 三个字母地位平等，选哪个字母作为主元均不合适，故考虑构造关于 x 为主元的函数.构造函数 $f(x)=\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}-1$，该函数解析式是关于 x 的整式，如果是二次函数，至多有两个零点；如果是一次函数，则有一个零点，考察 $f(a)=\frac{(a-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(a-c)(a-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(a-a)(a-b)}{(c-a)(c-b)}-1=0$，同理 $f(b)=0$；$f(c)=0$，$f(x)$ 至少存在三个零点，故不可能是二次或一次函数，只能为常数函数.故 $f(x)=0$ 恒成立，即 $\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=1$ 成立.

点评　这里函数的方法关键是把握了整式函数的本质特征，显然比直接通分化简的思路站在了更高的视角，同样的思想方法可以获得恒等式进一步的推广：

$$\frac{(x-a_2)(x-a_3)\cdots(x-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_n)}+\frac{(x-a_1)(x-a_3)\cdots(x-a_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\cdots(a_2-a_n)}+\cdots+\frac{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{n-1})}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})}=1$$

例 2　证明 $[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx]$（其中 n 为任意正整数）

分析 根据等式的特征，用常规化简的方法难以入手，$[x]$ 为高斯函数，考虑构造函数 $f(x)=[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]-[nx]$，考察函数 $f(x)$ 的性质，当 $x\in\left[0,\frac{1}{n}\right)$ 时，$x+\frac{1}{n}$、$x+\frac{2}{n}$、…、$x+\frac{n-1}{n}$、$nx\in[0,1)$，故 $f(x)=0$.考察 $x\notin\left[0,\frac{1}{n}\right)$ 时，$f(x)$ 是否为 0，只需研究 $f(x)$ 的周期性，由“$x\in\left[0,\frac{1}{n}\right)$”，区间长度为 $\frac{1}{n}$，尝试

$$f(x+\frac{1}{n})=\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\left[x+\frac{3}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]+[x+1]-\left[n\left(x+\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$=\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\left[x+\frac{3}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]+[x]+1-[nx]-1$$

$$=f(x)$$

所以$\frac{1}{n}$是$f(x)$的周期，

所以$f(x)=0$恒成立，即$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx]$恒成立.

根据以上两个例子，可以看出用函数的思路证明恒等式，一般过程是作差构造函数解析式，再根据函数特征或研究函数的性质确定函数值为定值即可.

作者简介：樊陈卫，（1978-），女，江苏海门人，中学高级教师，南通市骨干教师。主要研究解题教学和高考试题动向，在《中学数学》《数学教学》《中学数学研究》《中学数学教学》《高中数学教与学》等杂志发表论文多篇。